MÉMOIRE

SUR

LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES

DEUXIÈME PARTIE

PAR M.r GEORGE BIDONE.

Lu dans la séance du 7 février 1819,
et inséré dans le XXIV volume des Mémoires de l'Académie Royale des sciences de Turin.

Les formules que j'ai données sur les transcendantes elliptiques, et qui sont imprimées dans le précédent volume des Mémoires de cette Académie, se rapportent uniquement aux valeurs que ces transcendantes acquièrent lorsqu'elles sont fonctions *complètes*. Dans ces formules je me suis borné à ce que, dans tous les cas, elles donnent, au moins, sept décimales exactes de la valeur de la fonction, en conservant aux paramètres l'expression générale et indéterminée entre des limites assez étendues pour chaque formule particulière.

Ces formules présentées sous la forme d'intégrales définies, avec un petit nombre de termes, ne peuvent fournir le moyen d'avoir un plus grand degré d'approximation, ni faire connaître la loi que suivent les différens termes qui les composent. Pour cela il faut nécessairement avoir les développemens des expressions différentielles qui

mettent en évidence la formation successive des termes de l'intégrale. Ces développemens outre qu'ils donnent la loi des termes, et le moyen d'avoir tel degré d'approximation que l'on veut, offrent encore l'avantage de donner la valeur de l'intégrale sous forme indéfinie, soit par rapport aux paramètres, soit par rapport à la variable.

Ayant de nouveau réfléchi sur cette matière, j'ai reconnu que l'on peut avoir des développemens qui convergent assez rapidement vers la valeur de l'intégrale, quelle que soit la grandeur du paramètre ; c'est-à-dire que les mêmes développemens peuvent servir pour toutes les valeurs du paramètre. Ce sont ces développemens que j'ai l'honneur de présenter à la Classe dans ce Mémoire. La méthode est la même pour les trois espèces de transcendantes elliptiques. Les suites sont telles que la valeur de chaque terme, dans le cas le plus défavorable, est encore moindre que la neuvième partie de la valeur du terme précédent. La formation et le calcul des termes successifs de ces suites s'obtiennent par les termes qui précédent dans les mêmes suites, de sorte qu'ayant calculé le premier ou au plus les deux premiers termes de chaque suite, on a les suivans par de simples opérations algébriques.

A la fin du Mémoire je donne les transformations dont j'ai fait usage pour avoir les formules relatives aux fonctions *complètes*.

De l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-e^2z^2}}$

1. En développant le radical $\sqrt{1-e^2z^2}$ on a

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-e^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2}e^2z^2 + \frac{1.3}{2.4}e^4z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6z^6 + \ldots \right\};$$

maintenant en prenant l'intégrale entre des limites quelconques de z comprises depuis $z=0$ jusqu'à $z=1-e$, il est facile de voir que les termes successifs du deuxième membre de l'équation précédente formeront une suite plus convergente que la progression $1 : e^2(1-e)^2 : e^4(1-e)^4 :$ etc. La quantité $e^2(1-e)^2$ est un maximum lorsque $e=\frac{1}{2}$, et dans ce cas la progression devient $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{16^2} :$ etc. : d'où l'on peut conclure que quelle que soit la valeur de e, et quelles que soient les limites de l'intégrale, pourvu qu'elles soient comprises entre $z=0$ et $z=1-e$, les termes du développement précédent formeront dans tous les cas une suite plus convergente que la progression $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{16^2} :$ etc.

2. En supposant $e=\frac{1}{2}$ et en prenant l'intégrale depuis $z=0$ jusqu'à $z=1-e=\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}e^{10}\cdot\int\frac{z^{10}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} < 0,000\,000\,012\ldots$$

$$\frac{1.3.5\ldots21}{2.4.6\ldots22}e^{22}\cdot\int\frac{z^{22}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} < 0,000\,000\,000\,000\,000\,17\ldots$$

ainsi les cinq premiers termes donnent, dans le cas le plus défavorable, sept décimales exactes, et les onze premiers termes en donnent quinze.

3. La valeur des différens termes du développement précédent se déduit aisément de la valeur des termes qui précédent, dans le même développement : car on a en général

$$\int \frac{z^p dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z^{p-1}\sqrt{1-z^2}}{p} + \frac{(p-1)}{p} \cdot \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

d'où, en faisant

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = A_{(0)} = \text{const.} + \text{arc. sin. } z$$

$$\int \frac{z^p dz}{\sqrt{1-z^2}} = A_{(p)},$$ l'on tire

$$A_{(2)} = -\frac{z\sqrt{1-z^2}}{2} + \frac{1}{2} A_{(0)};$$

$$A_{(4)} = -\frac{z^3\sqrt{1-z^2}}{4} + \frac{3}{4} A_{(2)};$$

$$A_{(6)} = -\frac{z^5\sqrt{1-z^2}}{6} + \frac{5}{6} A_{(4)};$$

etc.

ainsi l'on aura

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-e^2 z^2}} = A_{(0)} + \frac{1}{2} e^2 A_{(2)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} e^4 A_{(4)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 A_{(6)} + \ldots$$

4. Pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-e^2 z^2}}$ lorsque les limites de z sont comprises entre $z = 1 - e$ et $z = 1$, on observera que l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-e^2z^2}}=\frac{1}{(1+ez)\sqrt{(1-z)(1-ez)}}\cdot\frac{\sqrt{1+ez}}{\sqrt{1+z}};$$

$$\frac{\sqrt{1+ez}}{\sqrt{1+z}}=\sqrt{\frac{1+e}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{(1-e)(1-z)}{(1+e)(1+z)}};$$

d'où, en faisant, pour abréger, $\frac{1-e}{1+e}=m$, $\frac{1-z}{1+z}=u$, il résulte

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-e^2z^2}}=-\frac{1}{(1+e)}\cdot\int\frac{du}{\sqrt{mu+u^2}\cdot\sqrt{1+mu}}.$$

En développant le radical $\sqrt{1+mu}$ suivant les puissances de mu, on aura

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-e^2z^2}}=-\frac{1}{(1+e)}\cdot\int\frac{du}{\sqrt{mu+u^2}}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}mu+\frac{1.3}{2.4}m^2u^2\right.$$
$$\left.-\frac{1.3.5}{2.4.6}m^3u^3+\ldots\right\}.$$

Or en prenant l'intégrale entre des limites quelconques de z depuis $z=1-e$ jusqu'à $z=1$, c'est-à-dire depuis $u=\frac{e}{2-e}$ jusqu'à $u=0$, on voit que les termes successifs du deuxième membre de l'équation précédente forment une suite plus convergente que la progression $1:\frac{e(1-e)}{(1+e)(2-e)}:\frac{e^2(1-e)^2}{(1+e)^2(2-e)^2}$: etc. La quantité $\frac{e(1-e)}{(1+e)(2-e)}$ est un maximum lorsque $e=\frac{1}{2}$, et dans ce cas la progression devient $1:\frac{1}{9}:\frac{1}{9^2}$: etc. Ainsi quelle que soit la valeur de e, et quelles que soient les limites de z, pourvu qu'elles soient comprises

entre $z=1-e$ et $z=1$, les termes du développement précédent forment une suite plus convergente que la progression $1 : \frac{1}{9} : \frac{1}{9^2}$: etc.

5. Supposons $e=\frac{1}{2}$, et prenons l'intégrale depuis $z=1-e=\frac{1}{2}$ jusqu'à $z=1$; c'est-à-dire depuis $u=\frac{1}{8}$ jusqu'à $u=0$, nous aurons

$$\frac{1.3.5\ldots 11}{(1+e)\,2.4.6\ldots 12}\, m^6. \int \frac{u^6 du}{\sqrt{mu+u^2}} < 0,\ 000\ 000\ 043\ldots$$

$$\frac{1.3.5\ldots 27}{(1+e)\,2.4.6\ldots 28}\, m^{14}. \int \frac{u^{14} du}{\sqrt{mu+u^2}} < 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 3\ldots,$$

partant les six premiers termes du développement dont il s'agit, donnent dans tous les cas sept décimales exactes, et les quatorze premiers termes en donnent quinze.

6. Pour calculer les termes successifs de ce développement, on a en général

$$\int \frac{u^p du}{\sqrt{mu+u^2}} = \frac{u^{p-1}\sqrt{mu+u^2}}{p} - \frac{(2p-1)}{2p}\, m. \int \frac{u^{p-1} du}{\sqrt{mu+u^2}};$$

ainsi en faisant

$$\int \frac{du}{\sqrt{mu+u^2}} = B_{(0)} = \text{const.} - 2 \log. (\sqrt{m+u} + \sqrt{u})$$

$$\int \frac{u^p du}{\sqrt{mu+u^2}} = B_{(p)};\ \text{on déduit}$$

$$B_{(1)} = \sqrt{mu+u^2} - \frac{m}{2}.\, B_{(0)};$$

$$B_{(2)} = \frac{u\sqrt{mu+u^2}}{2} - \frac{3m}{4} . B_{(1)} ;$$

$$B_{(3)} = \frac{u^2\sqrt{mu+u^2}}{3} - \frac{5m}{6} . B_{(2)} ;$$

etc.

et l'on aura

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}} = -\frac{1}{(1+e)} . \left\{ B_{(0)} - \frac{1}{2} m B_{(1)} + \frac{1.3}{2.4} m^2 B_{(2)} - \frac{1.3.5}{2.4.6} m^3 B_{(3)} + \ldots \right\} .$$

De l'intégrale $\int \frac{dz\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$.

7. En développant le radical $\sqrt{1-e^2z^2}$ suivant les puissances de e^2z^2, et en conservant les dénominations dont nous nous sommes servi dans le n.° 3, nous aurons

$$\int \frac{dz\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} = A_{(0)} - \frac{1}{2} e^2 A_{(2)} - \frac{1 . 1}{2 . 4} e^4 A_{(4)} - \frac{1 . 1 . 3}{2 . 4 . 6} e^6 A_{(6)} - \frac{1 . 1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6 . 8} e^8 A_{(8)} - \ldots$$

Cette suite, analogue à celle du n.° 3, sera semblablement dans tous les cas plus convergente que la progression $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{16^2}$: etc., quelle que soit la valeur de e, et quelles que soient les limites de z, pourvu qu'elles soient comprises entre $z = 0$ et $z = 1 - e$.

En supposant $e = \frac{1}{2}$ et en prenant l'intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1 - e = \frac{1}{2}$, cas le plus défavorable, on a

$$\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} e^8 A_{(8)} < 0,000\,000\,038\ldots.$$

$$\frac{1.1.3.5\ldots17}{2.4.6.8\ldots20} e^{20} A_{(20)} < 0,000\,000\,000\,000\,000\,23\ldots.$$

Ainsi les quatre premiers termes donnent dans tous les cas sept décimales exactes, et les dix premiers termes en donnent quinze.

8. Pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{dz\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$ lorsque les limites de z sont comprises entre $z = 1 - e$ et $z = 1$, on fera $\frac{1-e}{1+e} = m$, $\frac{1-z}{1+z} = u$, et en développant le radical $\sqrt{1+mu}$, on aura

$$\int \frac{dz\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} = -(1+e)\cdot\int \frac{du\sqrt{m+u}}{(1+u)^2\sqrt{u}}\cdot\left\{1 + \frac{mu}{2} - \frac{1.1}{2.4}m^2u^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}m^3u^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}m^4u^4 + \ldots\right\}.$$

Cette suite, analogue à celle du n.° 4, est pareillement dans tous les cas plus convergente que la progression $1 : \frac{1}{9} : \frac{1}{9^2} :$ etc., quelle que soit la valeur de e et quelles que soient les limites de z, pourvu qu'elles soient com-

prises entre $z=1-e$ et $z=1$, c'est-à-dire entre $u=\frac{e}{2-e}$ et $u=0$.

En supposant $e=\frac{1}{2}$ et en prenant les intégrales depuis $z=1-e=\frac{1}{2}$ jusqu'à $z=1$, c'est-à-dire depuis $u=\frac{1}{3}$ jusqu'à $u=0$, on a

$$\frac{(1+e)1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}m^6.\int\frac{u^5du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2}<0,\ 000\ 000\ 004\ldots$$

$$\frac{(1+e)1.3.5\ldots23}{2.4.6.8\ldots26}m^{13}.\int\frac{u^{12}du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2}<0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00012\ldots$$

d'où l'on voit que les six premiers termes donnent dans tous les cas sept décimales exactes, et les treize premiers termes en donnent quinze.

9. On pourra calculer les termes successifs du développement précédent de la manière suivante. On a en général

$$\int\frac{u^p du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2}=\int u^{p-2}du\sqrt{mu+u^2}-2\int\frac{u^{p-2}du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2}$$
$$-\int\frac{u^{p-2}du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2};$$

d'où en faisant $C_{(p)}=\int\frac{u^p du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2}$, et en observant que l'on a, d'après le n.° 6, $B_{(q)}=\int\frac{u^q du}{\sqrt{mu+u^2}}$, on aura

$$C_{(p)}=B_{(p)}+mB_{(p-1)}-2C_{(p-1)}-C_{(p-2)}.$$

La formation des quantités $B_{(q)}$ a été donnée dans le n.° 6, ainsi en connaissant $C_{(0)}$ et $C_{(1)}$ on aura $C_{(2)}$, $C_{(3)}$ etc. par les équations

$$C_{(2)} = B_{(2)} + m\,B_{(1)} - 2\,C_{(1)} - C_{(0)}\,;$$

$$C_{(3)} = B_{(3)} + m\,B_{(2)} - 2\,C_{(2)} - C_{(1)}\,;$$

$$C_{(4)} = B_{(4)} + m\,B_{(3)} - 2\,C_{(3)} - C_{(2)}\,;$$

etc.

Les valeurs de $C_{(0)}$ et de $C_{(1)}$ sont les suivantes,

$$\int \frac{du\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2} = \text{const.} - \frac{\sqrt{mu+u^2}}{1+u}$$

$$- \frac{(2-m)}{\sqrt{1-m}}.\log.\left(\frac{\sqrt{m+u}+\sqrt{(1-m)u}}{\sqrt{1+u}}\right)$$

$$+ 2.\log.\left(\sqrt{m+u}+\sqrt{u}\right).$$

$$\int \frac{udu\sqrt{mu+u^2}}{(1+u)^2} = \text{const.} + \frac{(2+u)\sqrt{mu+u^2}}{1+u}$$

$$+ \frac{(4-3m)}{\sqrt{1-m}}.\log.\left(\frac{\sqrt{m+u}+\sqrt{(1-m)u}}{\sqrt{1+u}}\right)$$

$$- (4-m).\log.\left(\sqrt{m+u}+\sqrt{u}\right).$$

On a en outre

$$\int \frac{du\sqrt{m+u}}{(1+u)^2\sqrt{u}} = \text{const.} + \frac{\sqrt{mu+u^2}}{1+u}$$

$$+ \frac{m}{\sqrt{1-m}}.\log.\left(\frac{\sqrt{m+u}+\sqrt{(1-m)u}}{\sqrt{1+u}}\right).$$

D'après cela on aura

$$\int \frac{dz\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} = -(1+e).\left\{\int \frac{du\sqrt{m+u}}{(1+u)^2\sqrt{u}} + \frac{1}{2}mC_{(0)} - \frac{1.1}{2.4}m^2C_{(1)} + \frac{1.1.3}{2.4.6}m^3C_{(2)} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}m^4C_{(3)} + \ldots\right\}.$$

De l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+\alpha^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}$ *où le coefficient* α^2 *qui peut être positif ou négatif, est supposé* $< e^2$.

10. En développant le radical $\sqrt{1-e^2z^2}$, on aura

$$\int \frac{dz}{(1+\alpha^2z^2)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-e^2z^2}} = \int \frac{dz}{(1+\alpha^2z^2)\sqrt{1-z^2}}.\left\{1 + \frac{1}{2}e^2z^2 + \frac{1.3}{2.4}e^4z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6z^6 + \ldots\right\}.$$

Cette suite, analogue à celle du n.° 1, est également dans tous les cas plus convergente que la progression $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{16^2}$: etc., quelle que soit la valeur de e, et quelles que soient les limites de z, pourvu qu'elles soient comprises entre $z = 0$ et $z = 1 - e$. En faisant $e = \frac{1}{2}$, et en intégrant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1 - e = \frac{1}{2}$, on a, même en supposant $\alpha^2 = -e^2$,

$$\frac{1.3\ldots9}{2.4\ldots10}e^{10}\int \frac{z^{10}dz}{(1+\alpha^2z^2)\sqrt{1-z^2}} < 0,000\,000\,013\ldots$$

$$\frac{1.3\ldots21}{2.4\ldots22}e^{22}\int \frac{z^{22}dz}{(1+\alpha^2z^2)\sqrt{1-z^2}} < 0,000\,000\,000\,000\,000\,18\ldots$$

Ainsi les cinq premiers termes donnent dans tous les cas sept décimales exactes, et les onze premiers termes en donnent quinze.

11. On formera les termes successifs de ce developpement, en observant que l'on a

$$\int \frac{z^p\,dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{z^{p-2}\,dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{1-z^2}}.$$

En faisant donc

$$\int \frac{dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{1-z^2}} = D_{(0)}\ ;\ \int \frac{z^p\,dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{1-z^2}} = D_{(p)};$$

et en notant que l'on a, par ce qui précède,

$$\int \frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = A_{(p-2)},$$ on aura

$$D_{(2)} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot A_{(0)} - \frac{1}{\alpha^2}\cdot D_{(0)}\ ;$$

$$D_{(4)} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot A_{(2)} - \frac{1}{\alpha^2}\cdot D_{(2)}\ ;$$

$$\vdots$$

$$D_{(p)} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot A_{(p-2)} - \frac{1}{\alpha^2}\cdot D_{(p-2)}\ .$$

La valeur de $D_{(0)}$ sera donnée par l'une des intégrales suivantes, selon que α^2 sera positif ou négatif :

$$\int \frac{dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{1-z^2}} = \text{const.} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot \text{arc. tang.}\left(\frac{z\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1-z^2}}\right):$$

$$\int \frac{dz}{(1-\alpha^2 z^2)\sqrt{1-z^2}} = \text{const.} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot \text{arc. tang.}\left(\frac{z\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-z^2}}\right).$$

L'on aura ainsi

$$\int \frac{dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2 z^2)}} = D_{(0)} + \frac{1}{2} e^2 D_{(2)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} e^4 D_{(4)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 D_{(6)} + \ldots$$

12. Pour avoir la valeur de la même intégrale, lorsque ses limites sont comprises entre $z = 1 - e$ et $z = 1$, on fera, comme précédemment, $m = \frac{1-e}{1+e}$; $u = \frac{1-z}{1+z}$; et de plus $n = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$, et l'on aura

$$\int \frac{dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{(1-e^2 z^2)(1-z^2)}} = -\frac{1}{(1+e)(1+\alpha^2)} \cdot \int \frac{(1+u)^2 du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2} \cdot \sqrt{1+mu}}$$

ou bien

$$\int \frac{dz}{(1+\alpha^2 z^2)\sqrt{(1-e^2 z^2)(1-z^2)}} = -\frac{1}{(1+e)(1+\alpha^2)} \cdot \int \frac{(1+u)^2 du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} mu + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^2 u^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^3 u^3 + \ldots \right\}.$$

Cette suite est dans le même cas que celles des n.ºs 4 et 8, et elle est toujours plus convergente que la progression $1 : \frac{1}{9} : \frac{1}{9^2}$: etc., quelle que soit la valeur de e, et quelles que soient les limites de l'intégrale, pourvu qu'elles soient renfermées entre $z = 1 - e$ et $z = 1$.

En supposant $e = \frac{1}{2}$ et en intégrant depuis $z = 1 - e = \frac{1}{2}$ jusqu'à $z = 1$, c'est-à-dire depuis $u = \frac{1}{3}$ jusqu'à $u = 0$, on a, même en supposant $\alpha^2 = -e^2$,

$$\frac{1}{(1+e)(1+\alpha^2)}\cdot\frac{1.3\ldots13}{2.4\ldots14}m^7.\int\frac{(1+u)^2u^7du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}<0,000\,000\,01\ldots$$

$$\frac{1}{(1+e)(1+\alpha^2)}\cdot\frac{1.3\ldots29}{2.4\ldots30}m^{15}.\int\frac{(1+u)^2u^{15}du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}<0,000\,000\,000\,000\,000\,07\ldots$$

partant les sept premiers termes donnent dans tous les cas sept décimales exactes, et les quinze premiers termes en donnent quinze.

13. Pour calculer les termes du développement précédent, on a

$$\int\frac{(1+u)^2u^p du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}=\int\frac{(1+u)^2u^{p-2}du}{\sqrt{mu+u^2}}$$

$$-2n\int\frac{(1+u)^2u^{p-1}du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}$$

$$-\int\frac{(1+u)^2u^{p-2}du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}.$$

En posant donc

$$\int\frac{u^q du}{\sqrt{mu+u^2}}=\mathrm{B}_{(q)};$$

$$\int\frac{(1+u)^2u^r du}{\sqrt{mu+u^2}}=\mathrm{G}_{(r)};$$

$$\int\frac{(1+u)^2u^p du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}=\mathrm{H}_{(p)};$$

on aura

$$\mathrm{H}_{(p)}=\mathrm{G}_{(p-2)}-2n\,.\,\mathrm{H}_{(p-1)}-\mathrm{H}_{(p-2)};$$

où l'on a

$$G_{(p-2)} = B_{(p-2)} + 2B_{(p-1)} + B_{(p)}.$$

Les valeurs de $B_{(p)}$ sont connues par ce qui précède, et celles de $H_{(0)}$ et de $H_{(1)}$ sont données par les intégrales suivantes

$$\int \frac{(1+u)^2 du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}} = \text{const.} - 2.\log.(\sqrt{m+u}+\sqrt{u})$$

$$-\frac{\alpha\sqrt{2(1+e)(1+\alpha)}}{\sqrt{e+\alpha}}.\log.\left[\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(e+\alpha)u}}{\sqrt{1+\alpha+(1-\alpha)u}}\right]$$

$$+\frac{\alpha\sqrt{2(1+e)(1-\alpha)}}{\sqrt{e-\alpha}}.\log.\left[\frac{\sqrt{(1-\alpha)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(e-\alpha)u}}{\sqrt{1-\alpha+(1+\alpha)u}}\right];$$

$$\int \frac{(1+u)^2 u du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}} = \text{const.} + \sqrt{mu+u^2}$$

$$-\left(m+\frac{8\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)\log.(\sqrt{m+u}+\sqrt{u})$$

$$+\frac{\alpha(1+\alpha)\sqrt{2(1+\alpha)(1+e)}}{(1-\alpha)\sqrt{e+\alpha}}.\log.\left[\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(e+\alpha)u}}{\sqrt{1+\alpha+(1-\alpha)u}}\right]$$

$$-\frac{\alpha(1-\alpha)\sqrt{2(1-\alpha)(1+e)}}{(1+\alpha)\sqrt{e-\alpha}}.\log.\left[\frac{\sqrt{(1-\alpha)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(e-\alpha)u}}{\sqrt{1-\alpha+(1+\alpha)u}}\right];$$

dans ces deux intégrales on a $n = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$. Si $n = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$, on trouvera

$$\int \frac{(1+u)^2 du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}} = \text{const.} + 2\log.(\sqrt{m+u}+\sqrt{u})$$

$$-\frac{\alpha N\sqrt{1+e}}{k}.\log.\left(\frac{h(1+e)(m+u)+2ku+2M\sqrt{(1+e)(mu+u^2)}}{\sqrt{(1+u)^2+\alpha^2(1-u)^2}}\right)$$

$$+\frac{2\alpha M\sqrt{1+e}}{k}.\text{arc. tang.}\left(\frac{\sqrt{(h-1)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(k-e)u}}{\sqrt{(h+1)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(k+e)u}}\right)$$

$$-\frac{\alpha M\sqrt{1+e}}{k}.\text{arc. tang.}\left(\frac{\alpha(1-u)}{1+u}\right);$$

$$\int\frac{(1+u)^2 u\,du}{(1+2nu+u^2)\sqrt{mu+u^2}}=\text{const.}+\sqrt{mu+u^2}$$

$$-\left(m-\frac{8\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\log.(\sqrt{m+u}+\sqrt{u}$$

$$+\frac{\alpha[(1-\alpha^2)N-2\alpha M]\sqrt{1+e}}{(1+\alpha^2)\sqrt{e^2+\alpha^2}}.\log.\left[\frac{h(1+e)(m+u)+2ku+2M\sqrt{(1+e)(mu+u^2)}}{\sqrt{(1+u)^2+\alpha^2(1-u)^2}}\right]$$

$$-\frac{2\alpha[(1-\alpha^2)M+2\alpha N]\sqrt{1+e}}{(1+\alpha^2)\sqrt{e^2+\alpha^2}}.\text{arc. tang.}\left(\frac{\sqrt{(h-1)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(k-e)u}}{\sqrt{(h+1)(1+e)(m+u)}+\sqrt{2(k+e)u}}\right)\Big]$$

$$+\frac{\alpha[(1-\alpha^2)M+2\alpha N]\sqrt{1+e}}{(1+\alpha^2)\sqrt{e^2+\alpha^2}}.\text{arc. tang.}\left(\frac{\alpha(1-u)}{1+u}\right);$$

où l'on a fait

$h^2=1+\alpha^2$; $k^2=e^2+\alpha^2$; $M^2=hk+e+\alpha^2$;

$N^2=hk-e-\alpha^2$: d'après cela on aura

$$\int\frac{dz}{(1+\alpha^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}=-\frac{1}{(1+e)(1+\alpha^2)}.\Big\{\Pi_{(0)}-\frac{1}{2}.m\Pi_{(1)}$$

$$+\frac{1.3}{2.4}.m^2\Pi_{(2)}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.m^3\Pi_{(3)}+\ldots\Big\}.$$

14. Il ne sera pas inutile de remarquer, que le calcul des suites données aux n.os 3, 7 et 11 étant plus aisé que celui des suites données aux n.os 6, 9 et 13, on aura dans plusieurs cas de l'avantage à augmenter la convergence de ces dernières suites, et à diminuer celle des premières; ce que l'on peut obtenir facilement, en changeant les limites de l'intégration. Ainsi, par exemple, en prenant à l'aide des suites des n.os 3, 7 et 11, la première partie de l'intégrale depuis $z=0$ jusqu'à $z=1-e^2$, ces suites perdront de leur convergence, et en gagneront celles des n.os 6, 9 et 13, qui donnent l'autre partie de l'intégrale depuis $z=1-e^2$ jusqu'à $z=1$. Il est pareillement visible que lorsque la petitesse des quantités e^2 et m le comporte, on peut dans chacune des suites précédentes étendre les limites de l'intégration depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.

15. Je terminerai ce Mémoire en donnant ici les transformations d'où j'ai déduit les formules que j'ai publiées sur les fonctions elliptiques complètes. Ces transformations peuvent être utiles pour avoir des expressions abrégées de la valeur de ces transcendantes, eu égard au degré d'approximation qu'on se propose, et aux diverses valeurs des paramètres et des limites de l'intégrale.

Les transformations, dont il s'agit, sont les suivantes, qu'il est facile de vérifier;

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=\frac{(8-8e^2z^2+e^4z^4)}{4(1-e^2z^2)(2-e^2z^2)\sqrt{1-z^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{e^8z^8}{(8-8e^2z^2+e^4z^4)^2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=\frac{(2-e^2z^2)}{2(1-e^2z^2)\sqrt{1-z^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{e^4z^4}{(2-e^2z^2)^2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=$$

$$\frac{\{3+e+(1+3e)z\}}{2(1+z)(1+ez)\sqrt{2(1+e)}\sqrt{(1-ez)(1-z)}}\cdot\sqrt{1-\frac{(1-e)^2(1-z)^2}{\{3+e+(1+3e)z\}^2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=$$

$$\frac{[7+e+(1+7e)z]\sqrt{2(1+e)}}{2(1+ez)[5+3e+(3+5e)z]\cdot\sqrt{(1-ez)(1-z)}}\cdot\sqrt{1-\frac{(1-e)^3(1-z)^3}{(1+e)(1+z)[7+e+(1+7e)z]^2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=\frac{[4-(1+3e^2)z^2]}{(1-e^2z^2)[4-(3+e^2)z^2]}\cdot\sqrt{1-\frac{(1-e^2)^3z^6}{(1-z^2)[4-(1+3e^2)z^2]^2}};$$

cette dernière transformation ne peut servir que pour des limites de z moindres que l'unité.

En multipliant les deux membres des équations précédentes par $1-e^2z^2$, ou par $\frac{1}{1+\alpha^2z^2}$, on aura les transformations relatives aux deux autres espèces de fonctions elliptiques. Il est aisé de voir, qu'étant donnés la valeur du paramètre, les limites de l'intégrale, et le degré d'approximation qu'on se propose, on peut, entre ces diverses transformations, choisir la plus convenable; et en développant le dernier radical qu'elle renferme, on aura des termes exactement intégrables, et on verra fa-

cilement le nombre qu'il en faudra prendre pour avoir le degré d'approximation que l'on s'est proposé.

16. On peut avoir d'autres transformations semblables, dont le dernier radical est composé de deux parties, l'une desquelles reste toujours très-petite par rapport à l'autre, quelles que soient les valeurs du paramètre et de la variable. Telles sont, par exemple, les suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=$$

$$\frac{[1+(\sqrt{2(1+e)}-1)z]}{(1+z)(1+ez)\sqrt{(1-ez)(1-z)}}.\sqrt{1+\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+e})^2z(1-z)}{[1+(\sqrt{2(1+e)}-1)z]^2}};$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}}=$$

$$\frac{-(2-m^2y^2)dy}{(1+e)(1-m^2y^2)\sqrt{2my+(4-m^2)y^2}}.\sqrt{1-\frac{m^4y^4}{(2-m^2y^2)^2}};$$

où l'on a

$$m=\frac{1-e}{1+e};\quad y=\frac{1-z}{2+m+(2-m)z}.$$

Ces transformations, ainsi que les précédentes, peuvent être poussées aussi loin que l'on veut, à l'aide de l'équation identique

$$\sqrt{1-P}=\left(\frac{2-P}{2}\right).\sqrt{1-\frac{P^2}{(2-P)^2}}:$$

mais les expressions approchées qu'on en tire, deviennent plus compliquées à mesure que, par l'effet de ces mêmes transformations, le développement du radical offre une convergence plus rapide.
